力学ICD演習解答例

演習13

1. コマが回っていない場合コマは倒れるが、これは、コマに重力の力のモーメントが働いて床と接している点Oでコマの軸がp.85の上の図のようにxy面内で回転するからだと考えられる。この時の力のモーメントは式(8-6-1) $\mathbf{N} = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g} = Mgl\sin\theta\mathbf{e}_z$ と書けることはすでに8.6節で述べた。以下の設問に答えよ。

(1) コマの重心のO点の周りの角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r}_G \times \mathbf{P}_G$ （$\mathbf{P}_G$は重心の運動量）の向きと大きさを求めよ。ただし、大きさはl, θ, M, g を使って表せ。

（**解答例**）重心は半径lの円に沿ってz軸の周りを回転するので、重心の速度は円の接線方向に向いて大きさが $l\dot{\theta}$、重心の運動量は$M(l\dot{\theta})$となる。よって、$\mathbf{L} = \mathbf{r}_G \times \mathbf{P}_G = lM(l\dot{\theta})\sin 90\mathbf{e}_z = Ml^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z$. $\mathbf{L}$はz軸正の方向を向き、その大きさは$Ml^2\dot{\theta}$.

(2) 回転の運動方程式よりθ の満たす方程式を求めよ。

（**解答例**）$\mathbf{L}$も$\mathbf{N}$もz軸正の方向を向いているので、$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$ のz成分以外はゼロになる。これを書き出せば、$\frac{d}{dt}(Ml^2\dot{\theta}) = Mgl\sin\theta$ （$\omega = \dot{\theta}$ なので、これは、$(Ml^2)\frac{d\omega}{dt} = Mgl\sin\theta$ とも書ける。(Ml^2)はz軸の周りの慣性モーメントなので、これは固定軸（z軸）の周りの回転の運動方程式になっている）。微分を実行し、変形すると、求める方程式は $Ml^2\ddot{\theta} = Mgl\sin\theta$、あるいは、$\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta$.

(3) これより、鉛直方向からわずかに傾いた回転していないコマはどのように倒れていくかを述べなさい。（上の方程式を解く必要はない）

（**解答例**）傾けば傾くほど加速して倒れていく。正確に言うと、上の結果、$\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta$、より角加速度$\ddot{\theta}$（$\omega = \dot{\theta}$ の変化率）は傾きの角度 θ が大きいほど大きくなる（$\ddot{\theta}$ は $\sin\theta$ に比例する。$\sin\theta$は θ が大きいと大きくなる）。

2. コマが回っているときは倒れずに歳差運動を起こすが、歳差運動の角速度 Ω が式(8-6-2) $\Omega = \dfrac{Mgl}{I_0\omega_0}$ で表されることを示しなさい（8.6節の図や記号を使って良い）。

（**解答例**）重力による力のモーメント$\mathbf{N}_0 = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g}$ の大きさは $|\mathbf{N}_0| = Mgl\sin\theta$ であるが、回転の運動方程式より、これが $\left|\frac{d\mathbf{L}_0}{dt}\right|$ に等しくなることより求める。まず、８.6節、p.86上の図で歳差運動により $\mathbf{L}_0$ の先端がy軸の周りを描く円の半径PQは $L_0\sin\theta$ （p.84の下の図も見よ）となるから、Δt 時間に $\mathbf{L}_0$ の先端が回る角度を$\Delta\varphi$ とすると、Δt 時間での$\mathbf{L}_0$の変化は$|\Delta\mathbf{L}_0| = (L_o\sin\theta)\Delta\varphi$ 　と書ける。φ の時間変化は歳差運動の角速度Ω (すなわち、$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$)なので、$\left|\frac{d\mathbf{L}_0}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}[\frac{L_0\sin\theta\Delta\varphi}{\Delta t}] = L_0\sin\theta\Omega$ となる。これが $|\mathbf{N}_0| = Mgl\sin\theta$ に等しいので、$L_0\sin\theta\Omega = Mgl\sin\theta$. 変形して、$\Omega = \frac{Mgl}{L_0} = \frac{Mgl}{I_0\omega_0}$ が得られる。

3. 　8.7.2節の図のようにy軸のまわりに質量の無視できる軸のついた円板が高速に回転しているジャイロがあったとする(角速度の大きさ ω、角運動量の大きさをL とする)。この物体の中心軸の周りの慣性モーメントを I とすると、$L = I\omega$. このとき、以下の問いに答えよ。ただし、この問題では重力は考えない。

(1) 角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$と角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}$の向きを求めよ。

（**解答例**）角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$の向きは円板が回る方向に右ネジを回した時進む方向である(8.3.2節を見よ）からy軸正の方向（$(\mathbf{e}_y)$ 方向）となる。角運動量ベクトル$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$も$\boldsymbol{\omega}$と同じ方向を向く。

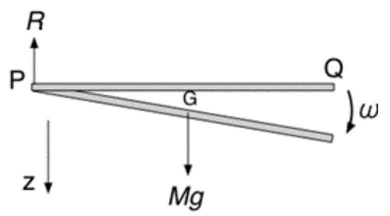
(2) このジャイロの中心軸を x 軸のまわりに角速度Ω ($\ll \omega$)で回したい。これに必要な力のモーメント$\mathbf{N}$ の大きさと向きを求めよ。
（**解答例**）ジャイロの中心軸がx 軸のまわりをp.87の図の方向にΔt の間に $\Delta\varphi$ 回るとすると、$\boldsymbol{L}$ はz軸方向に$|\Delta\mathbf{L}| = L\Delta\varphi$ だけ変化する。$\Delta t \to 0$ の極限を取ると、$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = L\frac{d\varphi}{dt} = L\Omega$ となる。よって、回転の運動方程式 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$ より、これが$|\mathbf{N}|$ に等しいので、$|\mathbf{N}| = L\Omega = (I\omega)\Omega$となる。$\mathbf{N}$の向きは$d\mathbf{L}/dt$ の向きと同じなのでz軸正の方向（$\mathbf{e}_z$ 方向）を向く。

(3) このときジャイロの中心軸には軸が動く方向と直角に偶力$(\mathbf{F})$を図のように加えなくてはならないことを示せ。（**解答例**）軸の両端に同じ大きさの力を逆向きに加えるので、$\mathbf{N} = 2(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$. よって、$\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ が$\mathbf{N}$の向き、$\mathbf{e}_z$ 方向、を向くように$\mathbf{F}$を加えれば良い。$\boldsymbol{r}$ は原点から軸の端に伸びるベクトルであるから、p.87の図のようにx軸に平行に互いに逆向きの$\mathbf{F}$を両端に加えれば、この条件を満たす。なお、偶力を加えるのは重心が移動しないため（ジャイロ全体が並進運動しないため）。

(4) 軸が動く方向、$\mathbf{F}$、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$の間の向きの関係を調べよ。
（**解答例**）軸が動く方向は $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{F}$ （ベクトル積） の方向。なお、歳差運動の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$の向きは、$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}$ の方向である。

4. 略

5. （**参考追加問題**：力学ICDノートの演習13には載っていません）質量M, 長さ l の一様な棒を棒の両端 P, Qで水平に支えていた時、急に片方（Q）の支えをはずした。その瞬間の重心の加速度aとP点が棒に及ぼす抗力Rを求めたい。以下の問いに答えよ。（鉛直下方をz軸正の方向、重力加速度をgとする）



(1) 重心の運動方程式を求めよ。(M, g, R, z を使え。ここで、z は重心の位置である。Qを離した瞬間はz軸に沿って落ちると考える。抗力の向きに注意。）
（**解答例**）$M\ddot{z} = Mg - R$

(2) P点の周りの棒の慣性モーメントを書け。（**解答例**）$I = (1/3)Ml^2$

(3) Qを離した瞬間、棒はP点の周りに角速度$\boldsymbol{\omega}$で回転を始めると考えて、Pを固定軸とする回転の運動方程式を書き、$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2l}g$ であることを示せ。（抗力による力のモーメントはどうなる？）

（**解答例**）Pを固定軸とする回転の運動方程式は $I\frac{d\omega}{dt} = N$. ここで、N は外力によるP点の周りの力のモーメントであるが、重力による$\mathbf{N}_G$と抗力による$\mathbf{N}_P$の和となる。しかし、抗力はP点に働くので$\mathbf{N}_P = 0$となるから$\mathbf{N}_G$のみ考えれば良い。よって、$\mathbf{N}_G = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g}$. ここで $\mathbf{r}_G$ はP点から重心Gに引いた位置ベクトルなので、$|\mathbf{r}_G| = l/2$. したがって、

$|\mathbf{N}_G| = |\mathbf{r}_G||M\mathbf{g}|\sin 90 = (l/2)Mg$. 結局、回転の運動方程式は、$(1/3)Ml^2\frac{d\omega}{dt} = (l/2)Mg$ と変形できるので、これより、$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2l}g$ が得られる。

(4) 重心の加速度aはg の何倍か。（**解答例**）$a = \ddot{z} = (1/2)l\frac{d\omega}{dt} = (3/4)g$

(5) P点での抗力RはMg の何倍か。（**解答例**）$R = Mg - M\ddot{z} = Mg - Ma = (1/4)Mg$